

コンピュータグラフィックスS

第9回 座標変換(2)

システム創成情報工学科 尾下 真樹
2019年度 Q2

0

今日の内容

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
 - 前回の演習問題(宿題)
 - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
 - 変換行列の設定

1

前回の復習

2

変換行列による座標変換の実現

- 視野変換+射影変換
 - アフィン変換(視野変換)+透視変換(射影変換)
 - 最終的なスクリーン座標は $(x'/w', y'/w', z'/w')$ となる

$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

射影変換 (カメラ→スクリーン) 視野変換 (モデル→カメラ) ↓ ↑
 モデル座標系での頂点座標 ↓ ↑ スクリーン座標系での頂点座標

3

視野変換

- モデル座標系からカメラ座標系に変換

4

射影変換

- カメラ座標系からスクリーン座標系に変換

5

同次座標変換

- 同次座標変換
 - 4 × 4 行列の演算により、3次元空間における **平行移動・回転・拡大縮小(アフィン変換)** などの操作を統一的に実現
 - (x, y, z, w) の4次元座標値(同次座標)を扱う
 - 3次元座標値は (x/w, y/w, z/w) で計算(通常は w = 1)

$$\begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

6

平行移動

- 平行移動
 - (Tx, Ty, Tz) の平行移動
 - 4 × 4 行列を用いることで、平行移動を適用することができる

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ z+T_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

7

回転

- 回転
 - 原点を中心とする回転を表す

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & 0 \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{00}x + R_{01}y + R_{02}z \\ R_{10}x + R_{11}y + R_{12}z \\ R_{20}x + R_{21}y + R_{22}z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

8

回転変換の行列

- 回転変換の行列の導出方法
 - 各軸を中心として右ねじの方向の回転(軸の元から見て反時計回り方向の回転)を通常使用
 - yz平面、xz平面、xy平面での回転を考えれば、2次元平面での回転変換と同様に求められる
 - 2次元平面での回転行列は、高校の数学の内容

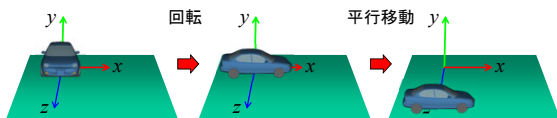
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X軸を中心とする回転変換 Y軸を中心とする回転変換 Z軸を中心とする回転変換

9

複数の変換行列の適用例

- 回転・移動の組み合わせの例



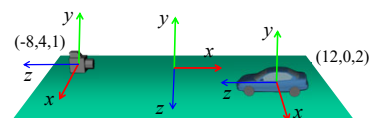
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意!

10

演習問題1

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
 - ワールド座標系に対して、モデルが (12,0,2) の位置にあり、Y軸を中心に -90度 回転している
 - ワールド座標系に対して、カメラが (-8,4,1) の位置にあり、Y軸を中心に -90度 回転している



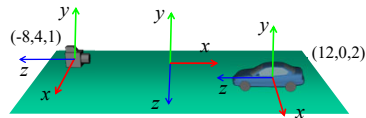
11

解答

- モデル座標系→カメラ座標系への変換

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系 モデル座標系→ワールド座標系



12

解答(検算)

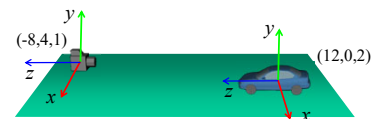
- 検算

– 行列を実際に計算してみる

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この場合、モデル座標系とカメラ座標系の向きが同じなので、結果的に単なる平行移動になっていることに注目

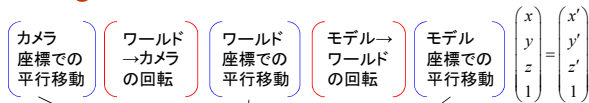
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



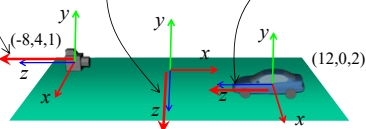
13

平行移動の適用位置(復習)

- 平行移動を適用する順番により、結果は変わる



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$



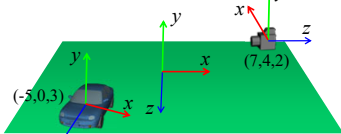
14

前回の演習問題(宿題)

15

演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
 - ワールド座標系に対して、モデルが(-5, 0, 3)の位置にあり、Y軸を中心に-30度回転している
 - ワールド座標系に対して、カメラが(7, 4, 2)の位置にあり、Y軸を中心に90度回転している



16

演習問題

- 変換行列を求める
 - モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求める
 - 行列の積の形で表現
- 検算
 - 変換行列(行列の積)を計算
 - いくつかの座標に適用してみて、結果を確認
 - (0, 0, 0)に座標変換を適用
 - (0, 0, 1)に座標変換を適用

17

変換行列の復習・応用

18

行列演算の適用(復習)

- 回転・移動の組み合わせの例

平行移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

回転

$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意!

19

行列計算の適用順序(復習)

- 行列演算では可換則は成り立たないことに注意!
 $AB \neq BA$
- 行列の適用順序によって結果が異なる
 - 例:
 - 回転 → 平行移動
 - 平行移動 → 回転

20

平行移動の適用位置

- 平行移動を適用する順番により、結果は変わる
- カメラ座標系での移動、モデル座標系での移動

カメラ座標での平行移動

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ワールド座標での平行移動

ワールド座標での回転

モデル座標での平行移動

モデル座標での回転

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

21

複数の回転をかけるときの注意

- 2回目以降の回転は、各回転は、前の回転がかかった後の座標系で適用されることに注意

22

複数の回転をかける例(1)

- Y軸周りの回転 → X軸周りの回転
- 2回目のX軸周りの回転は、ワールド座標系のX軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のX軸周りの回転となる

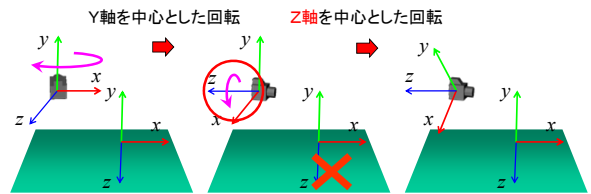
Y軸を中心とした回転

X軸を中心とした回転

23

複数の回転をかける例(2)

- Y軸周りの回転 → Z軸周りの回転
 - 同じく、2回目のZ軸周りの回転は、ワールド座標系のZ軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のZ軸周りの回転となる



24

複数の回転をかけるときの注意

- 最終的に決めたい向きに応じて、どのような順番・角度で変換行列を適用するのが適切かを考えて、決める必要がある

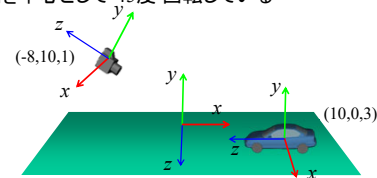
25

追加の演習問題

26

演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
 - 物体の位置が(10,0,3)にあり、Y軸を中心として-90度回転している
 - カメラの位置が(-8,10,1)にあり、Y軸を中心として-90度、Z軸を中心として-45度回転している



27

解答

• 解答

X軸周りの回転 Y軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

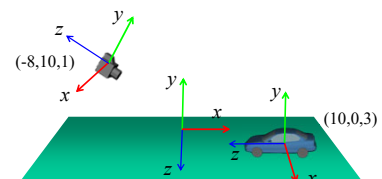
ワールド座標系→カメラ座標系
モデル座標系→ワールド座標系

28

解答

• モデル座標系→ワールド座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

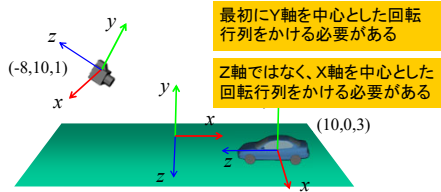


29

解答

- ワールド座標系→カメラ座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

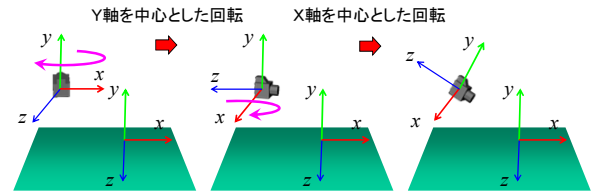


30

解答

- 2つの回転行列の適用

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

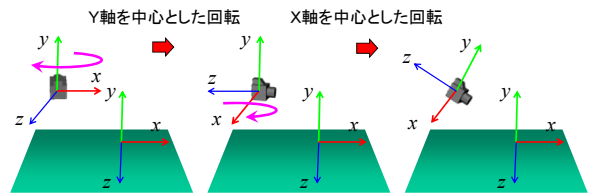


31

解答

- 注意点

- 2番目の回転では、ワールド座標系でみるとZ軸を中心にして回転しているが、カメラ座標系ではX軸を中心にして回転している

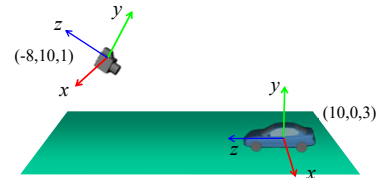


32

解答

- 図から分かるように、回転についてはカメラ座標系のX軸を中心にして-45度回転するのと同じ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



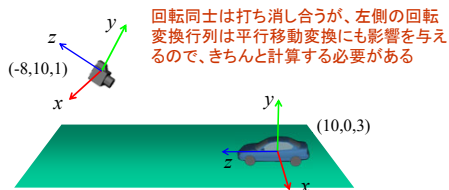
33

解答

- 最初と2回目の回転は打ち消しあう点に注目

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系 モデル座標系→ワールド座標系

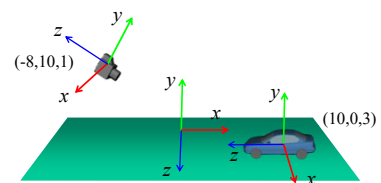


34

検算

- 前の問題と同様の検算を行う
- (各自でやっておくこと)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & 5.6 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



35

解答(誤答)

• 間違いの多い例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

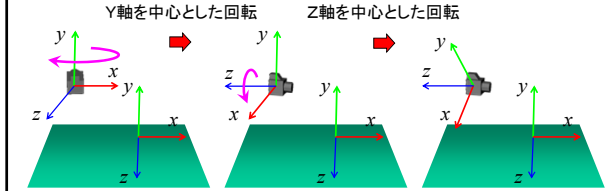
最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある

36

解答(誤答1)

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のZ軸を中心として回転するつもりが、カメラ座標系のZ軸を中心とした回転が適用されてしまう

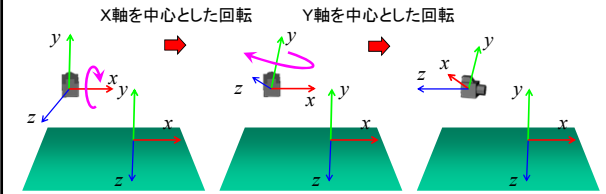


37

解答(誤答2)

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のY軸を中心として回転するつもりが、カメラ座標系のY軸を中心とした回転が適用されてしまう

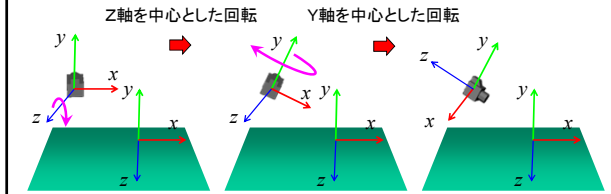


38

解答(誤答3)

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2回目の回転は、ワールド座標系ではなくローカル座標系のY軸を中心とした回転になるが、この場合、1回目の回転でちょうど傾きの方向が90度ずれているので(カメラがX軸ではなくZ軸を中心として回転しているので)、結果はたまたま合う



39

解答(誤答3)

• 解答

今回はどちらも同じ結果になる(こちらの方が意味的には正しい)

X軸周りの回転 Y軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系 モデル座標系→ワールド座標系

• 誤答(たまたま同じ計算結果になるが間違い)

Y軸周りの回転 Z軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系 モデル座標系→ワールド座標系

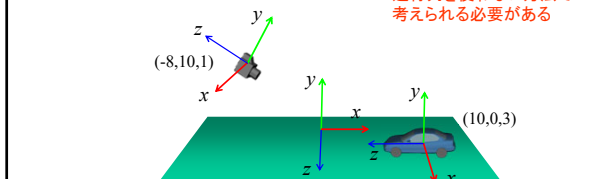
40

別解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系 モデル座標系→ワールド座標系
カメラ座標系→ワールド座標系の逆行列(右側と同じ形になっているところに注目)

逆行列を使わない方法で考えられる必要がある



41

OpenGLプログラミング 変換行列の設定

42

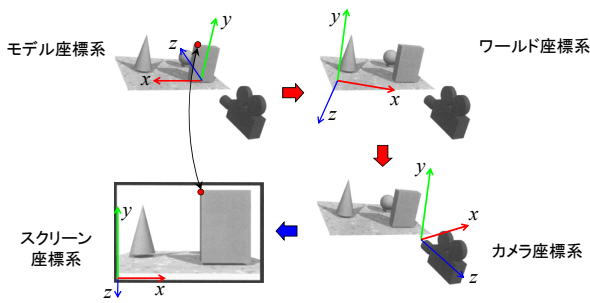
変換行列の設定

- OpenGLは、内部に変換行列を持っている
 - モデルビュー変換行列
 - 射影変換行列
 - 両者は別に扱った方が便利なので、別々に設定できるようにになっている
- OpenGLの関数を呼び出すことで、これらの変換行列を変更できる

43

座標変換(復習)

- モデル座標系からスクリーン座標系への変換



44

変換行列による座標変換(復習)

- 視野変換(アフィン変換) + 射影変換(透視変換)
 - 最終的なスクリーン座標は $(x'/w' \ y'/w' \ z'/w')$

$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

射影変換 (カメラ→スクリーン) 視野変換 (モデル→カメラ) モデル座標系での頂点座標 ↓ ↑ スクリーン座標系での頂点座標

45

座標変換の設定(復習)

- 自分のプログラムから OpenGLやDirectXに、2つの変換行列を設定する
 - ワールド座標からカメラ座標系への視野変換
 - カメラの位置・向きや、物体の位置向きに応じて、適切なアフィン変換行列を設定
 - さまざまな状況で、適切な変換行列を設定できるように、十分に理解しておく必要がある
 - カメラ座標系からスクリーン座標系への射影変換
 - 透視変換行列は、通常、固定なので、最初に一度だけ設定
 - 視野角やスクリーンサイズなどを適切に設定

46

変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
 - `glMatrixMode()`
 - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
 - 主に視野変換の設定に使われる関数
 - `glLoadIdentity()`、`glTranslate()`、`glRotate()`、他
 - 射影変換行列の設定に使われる関数
 - `gluPerspective()`、`glFrustum()`、`glOrtho()`、他

47

サンプルプログラムの変換行列の設定

• 描画処理 (display() 関数)

```
// 変換行列を設定(ワールド座標系→カメラ座標系)
glMatrixMode( GL_MODELVIEW );
glLoadIdentity();
③ glTranslatef( 0.0, 0.0, - 15.0 );
② glRotatef( - camera_pitch, 1.0, 0.0, 0.0 );

// 地面を描画(ワールド座標系で頂点位置を指定)
.....

// 変換行列を設定(モデル座標系→カメラ座標系)
① glTranslatef( 0.0, 1.0, 0.0 );

// ポリゴンを描画(モデル座標系で頂点位置を指定)
.....
```

以降、視野変換行列を変更することを指定
単位行列で初期化
平行移動行列・回転行列を順にかけると、変換行列を設定

54

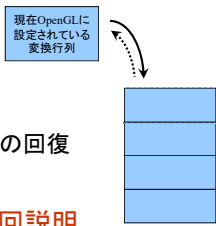
その他の変換行列の設定関数

- glLookAt(カメラ位置, 目標位置, 上方ベクトル)
 - カメラと目標の位置で指定
 - 回転角度で向きを表す場合には向かない
 - glLoadMatrix(配列), glMultMatrix(配列)
 - 配列を使って行列を直接設定 or かける
 - GL_double m[4][4];
 - m[i][j] が行列の j 行 i 列の要素を表す
- ※ やや特殊な設定方法なので、本講義の演習では、これらの関数は使用しない

55

変換行列の退避・復元(1)

- 現在の変換行列を別領域(スタック)に記録しておき、後から復元することができる
- glPushMatrix()
 - 現在の変換行列の退避
 - スタックに積む
- glPopMatrix()
 - 最後に退避した変換行列の回復
 - スタックから取り出す
- ※ 具体的な使用例は次回説明



56

変換行列の設定のための関数

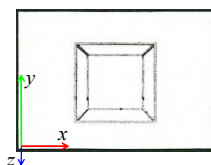
- 設定を行う変換行列の指定
 - glMatrixMode()
 - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
 - 主に視野変換の設定に使われる関数
 - glLoadIdentity(), glTranslatef(), glRotate(), 他
 - 射影変換行列の設定に使われる関数
 - gluPerspective(), glFrustum(), glOrth(), 他

57

射影行列の変換

• 射影変換の種類

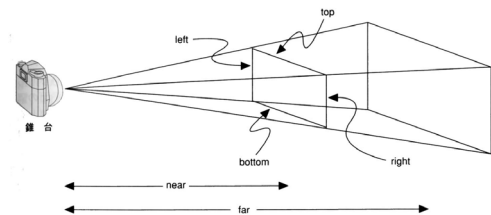
- 透視射影
 - 現実の見え方をシミュレート
 - 遠くにあるものほど中央に寄って見える
- 平行射影
 - 平行に射影
 - 図面などを描画する時に使用



58

透視射影変換

- glFrustum(手前面の大きさ, 手前面の距離, 奥面の距離)



59

透視変換(復習)

- 透視変換行列

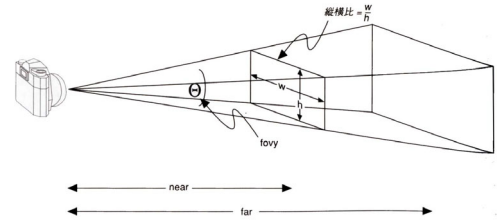
$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ r-l & 2n & t+b & 0 \\ 0 & t-b & t-b & 0 \\ 0 & 0 & -(f+n) & -2fn \\ 0 & 0 & f-n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \\ w' \end{pmatrix}$$

W'=-Zとなり、Zで割ることになる (Z値が大きくなるほど中央になる)

60

透視射影変換

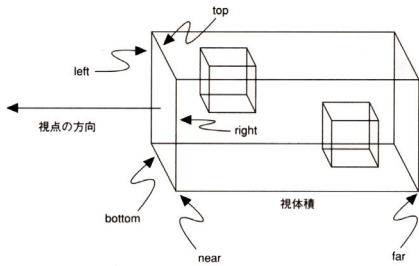
- gluPerspective (視野角, 縦横比, 手前面距離, 奥面距離)
 - 視界領域が左右対称であるという前提で、より少ない引数で透視射影変換を設定する関数



61

平行射影変換

- glOrtho (描画範囲, 手前面の距離, 奥面の距離)



62

射影変換の設定(サンプルプログラム)

- ウィンドウサイズから変更された時に設定
 - 透視変換行列の設定 (視野角を45度とする)

```
void reshape( int w, int h )
{
    // ウィンドウ内の描画を行う範囲を設定 (ウィンドウ全体に描画)
    glViewport(0, 0, w, h);

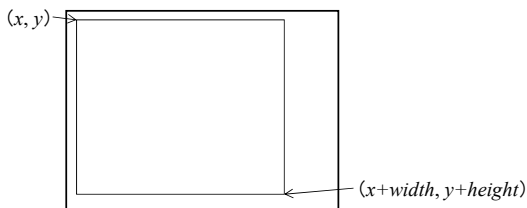
    // カメラ座標系→スクリーン座標系への変換行列を指定
    glMatrixMode( GL_PROJECTION );
    glLoadIdentity();
    gluPerspective( 45, (double)w/h, 1, 500 );
}
```

以降、射影変換行列を変更することを指定
単位行列で初期化
透視変換を設定

63

ビューポートの設定

- glViewport(x, y, width, height)
 - ウィンドウ内のどの範囲に描画を行うかを設定



64

まとめ

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
 - 前回の演習問題
 - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
 - 変換行列の設定

65

次回予告

- OpenGL演習
 - 視点操作の拡張
 - 変換行列を使ったアニメーション
 - 前回までの演習が終っていなかった人がいれば、必ず終らせておくこと